04/10/2016.

(2651008232).
Γραφείο (309Γ)

www.math.uoi.gr/~abatsidis/532.html.   abatsidis@uoi.gr

ΣΥΛΛΟΓΗ ΑΣΚΗΣΕΩΝ (61).

~X τ.μ. που περιγράφει τον αρ. αφίξεων των πελατών ενός φαρμακείου σε κάποιο χρ. διάστημα.

~Συλλογή τυχαίων μεταβλητών

Brown (1827) που παρατήρησε την τυχαία κίνηση ενός σωματιδίου σε ένα υγρό/αέριο.
Einstein (1905)
Wiener (1923).

Οι στοχαστικές διαδικασίες ασχολούνται με την μελέτη και ανάλυση τυχαίων κ' δυναμικών φαινομένων.
Τυχαίο φαινόμενο είναι το φαινόμενο του οποίου η έκβαση είναι αβέβαιη αλλά μία από μία συλλογή από δυνατά.
Δυναμικό είναι το φαινόμενο το οποίο εξελίσσεται στο χρόνο.

Ορισμός: Μία στοχαστική διαδικασία (σ.δ.) είναι μία οικογένεια (συλλογή) τυχαίων μεταβλητών σε ένα χώρο πιθανοτήτων* (Ω, F, P) δηλαδή $\{X(t), t\in T\}$. Η παράμετρος t είτε λαμβάνει τιμές σ'ένα διάστημα (σ.δ. σε συνεχή χρόνο) είτε λαμβάνει συγκεκριμένες τιμές (σ.δ. σε διακριτό χρόνο). Κάθε δυνατή τιμή της στοχαστικής διαδικασίας λέγεται κατάσταση της σ.δ. Το σύνολο των δυνατών καταστάσεων το λέμε χώρο καταστάσεων S, που μπορεί να είναι είτε διακριτός είτε συνεχής.

X_n: σ.δ. σε διακριτό χρόνο (η-οστή χρ. στιγμή).

(*) Χώρος πιθανοτήτων $(\Omega, \mathcal{F}, P)$

Ω: δειγμ. χώρος

$\mathcal{F}$: σ-άλγεβρα δηλ. μια μη-κενή συλλογή υποσυνόλων του Ω με τις εξής ιδιότητες: (i) $\in \Omega \in \mathcal{F}$, (ii) $A \in \mathcal{F} \Rightarrow A^c \in \mathcal{F}$ (iii) αν $A_1, \dots, A_n, \dots$ μια πεπερασμένη ή άπειρη ακολουθία συνόλων της $\mathcal{F}$ τότε $\cup A_i \in \mathcal{F}$.

P: μέτρο πιθανότητας, μη-αρνητική συνάρτηση με ~~P~~ $P(\Omega) = 1$.

π.χ. 1) Πρόβλημα ανάπτυξης πληθυσμών

Έστω $X(t)$ ο αριθμός των μελών ενός συγκεκριμένου πληθυσμού $\{X(t) : 0 \le t \le \alpha\}$

Αρχικό μέγεθος $X(0)$

$$X(t) = \max\{0, \underbrace{X(0)}_{\text{όσοι ήταν αρχικά}} + \underbrace{\Gamma(t)}_{\text{όσοι γενν. της ώρα}} - \underbrace{\Pi(0)}_{\text{όσοι πεθαίνουν της ώρα}}\}$$

2) Πρόβλημα Ελέγχου Αποθεμάτων

X_n: ο αριθμός των αποθηκευμένων προϊόντων στο τέλος του n-οστού μήνα.

$$X_{n+1} = \max\{0, X_n + \underbrace{M_n}_{\text{μπήκαν στο μεσοδιάστημα}} - \underbrace{Z_{n+1}}_{\text{όσα ζητήθηκαν}}\}$$

3) Πρόβλημα της οικολογικής αντιπαράθεσης

Έστω A, B δύο εχθρικοί πληθυσμοί που ζουν μαζί σε κάποιο συγκεκριμένο περιβάλλον. Αν ~~[illegible]~~ μέλος του A πληθυσμού συναντήσει μέλος του B γίνεται μάχη και ο A σκοτώνει το B με πιθανότητα P. O B σκοτώνει του A με q, με p+q=1. Κάθε φορά η μάχη είναι 1-1. Έστω X_n η στοχαστική διαδικασία που περιστάνει τον αριθμό των μελών του A μετά τη n-οστή μάχη.

Τότε $X_{n+1} = \underbrace{X_n + \Gamma_n - \Pi_n}_{\geq 1} + Z_{n+1} \geq 0$

X_{n+1}: αρ. μελών μετά την (n+1)-μάχη

Γ_n: όσοι γεννήθηκαν μεταξύ n, n+1 μάχης

Π_n: όσοι πέθαναν μεταξύ n, n+1 μάχης

Z_{n+1}: η τυχαία μεταβλητή $\begin{cases} 0, & \text{με } P(Z_{n+1}=0)=p \\ -1, & \text{με } P(Z_{n+1}=-1)=q \end{cases}$

Ταξινόμηση των σ.δ. ως προς τις σχέσεις εξάρτησης των τυχ. μεταβλ. που αποτελούν τη στοχαστική διαδικασία

Μαρκοβιανή Ιδιότητα:

$\boxed{\text{Ορισμός}}$: Μια σ.δ. ονομάζεται Μαρκοβιανή αν δοθείσας της κατάστασής της τη χρονική στιγμή t (παρόν), η κατάσταση της τη χρονική στιγμή s>t (μέλλον) δεν εξαρτάται από τις χρονικές στιγμές u<t (παρελθόν).

$$P(\underbrace{a<X_{t_k}<b}_{\text{μέλλον}} \mid \underbrace{X_{t_0}=w_0,\dots,}_{\text{παρελθόν}} \underbrace{X_{t_{k-1}}=w_{k-1}}_{\text{παρόν}}) = P(a<X_{t_k}<b \mid X_{t_{k-1}}=w_{k-1})$$

Μαρκοβιανή αλυσίδα είναι μία σ.δ. σε διακριτό χρόνο με διακριτό χώρο καταστάσεων που ικανοποιεί την Μαρκοβιανή ιδιότητα. Δηλαδή:

$$P(X_n=j \mid X_0 \dots X_{n-1}=i) = P(X_n=j \mid X_{n-1}=i).$$

$$P(X_n=j \mid X_{n-1}=i) = P_{ij}(n-1,n)$$ η πιθανότητα μετάβασης από το $i \to j$ από τη n-1 χρον. στιγμή → n: χρον. στιγμή.

π.χ. $P_{25}(6,7) = P(X_7=5 \mid X_6=2)$

$P_{25}(7,8) = P(X_8=5 \mid X_7=2)$

Ορισμός : Ομογενής Μαρκοβιανή Αλυσίδα : ~~λέγεται η~~

~~Μαρκοβια~~ Μια Μαρκ. Αλυσ. λέμε ότι έχει επιπλέον έχει την ιδιότητα της στασιμότητας και την ονομάζουμε ομογενή ή στατική αν οι $P_{ij}(n-1,n)$ είναι ανεξάρτητες της χρονικής στιγμής.

Από 'δω και πέρα θα συμβολίζουμε με P_{ij} την πιθανότητα μετάβασης σε ένα βήμα από την κατάσταση i στην κατάσταση j

Π.χ. X_n : σ.δ που περιγράφει την κατάσταση ενός κλιματιστικού μετά τη n-οστή επιθεώρηση.

Σ.Δ. σε διακριτό χρόνο με διακριτό χώρο {Λειτουργεί = 0, Δε Λειτουργεί = 1}

Έχουμε Μαρκοβιανή ιδιότητα + ομογενής

Συνδυασμοί : $\underbrace{\overset{Π}{0}\to\overset{Μ}{0}}_{P_{00}}$, $\underbrace{\overset{Π}{0}\to\overset{Μ}{1}}_{P_{01}}$, $\underbrace{\overset{Π}{1}\to\overset{Μ}{0}}_{P_{10}}$, $\underbrace{\overset{Π}{1}\to\overset{Μ}{1}}_{P_{11}}$ (Π = παρόν, Μ = μέλλον).

$P_{00} = P(0\to 0)$

$\underbrace{P_{00}+P_{01}=1}$ $\underbrace{P_{10}+P_{11}=1}$.

$$P = \begin{array}{c} \text{ΠΑΡΟΝ} \\ 0 \\ 1 \end{array} \begin{array}{c} \text{ΜΕΛΛΟΝ} \\ \begin{bmatrix} P_{00} & P_{01} \\ P_{10} & P_{11} \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \\ \to Αθρ = 1 \\ \to Αθρ = 1. \end{array}$$